A dualidade de Serre e o teorema de Riemann-Roch

Gabriel Bassan dos Santos

O que estudamos?

O que estudamos?

- Esquemas

O que estudamos?

- Esquemas
- Cohomologia de feixes

O que estudamos?

- Esquemas
- Cohomologia de feixes
- Álgebra homológica

O que estudamos?

- Esquemas
- Cohomologia de feixes
- Álgebra homológica

⋮

↳ abstract nonsense

Sobre o que vou falar?

Sobre o que vou falar?

K corpo alg. fechado

$\mathbb{P}^2 = K^3 \setminus \{0\} / K^\times$

$f \in K[x, y, z]$ homogêneo irred. t.q.

f, f_x, f_y, f_z não possuem zeros em comum.

Sobre o que vou falar?

K corpo alg. fechado

$\mathbb{P}^2 = K^3 \setminus \{0\} / K^*$

$f \in K[x, y, z]$ homogêneo irred. t.q.

f, f_x, f_y, f_z não possuem zeros em comum.

Def (curva algébrica)

$$V(f) = \{ p = [x : y : z] \in \mathbb{P}^2 \mid f(p) = 0 \}$$

Def (Corpo de funções)

$X = V(f)$ curva

- $S(X) := K[x,y,z]/(f)$ (anel de funções)

- $K(X) := \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in S(X)_d, d \in \mathbb{N}, g \neq 0 \right\} \subseteq \operatorname{Frac} S(X)$

(Corpo de funções)

Def (Corpo de funções)

$X = V(f)$ curva

- $S(X) := K[x,y,z]/(f)$ (anel de funções)

- $K(X) := \left\{ \frac{f}{g} \;\middle|\; f, g \in S(X)_d, d \in \mathbb{N}, g \neq 0 \right\} \subseteq \operatorname{Frac} S(X)$

(Corpo de funções)

- $\varphi \in K(X)$ é regular em $p \in X$ se

$$\varphi = \frac{f}{g} \text{ com } g(p) \neq 0$$

Podemos definir zeros e polos de $\varphi \in K(X)^{\times}$.

Podemos definir zeros e polos de $\varphi \in K(X)^{\times}$:

$$v_P(\varphi) = \begin{cases} n, & P \text{ é zero de ordem } n. \\ -n, & P \text{ é polo de ordem } n. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Podemos definir zeros e polos de $\varphi \in K(X)^{\times}$:

$$v_p(\varphi) = \begin{cases} n, & p \text{ é zero de ordem } n. \\ -n, & p \text{ é polo de ordem } n. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Obs: $v_p : K(X)^{\times} \longrightarrow \mathbb{Z}$ é valoração discreta.

i.e.,

- $v_p(\varphi\psi) = v_p(\varphi) + v_p(\psi)$
- $v_p(\varphi + \psi) \geq \min\{v_p(\varphi), v_p(\psi)\}$

Def (Divisores)

Um divisor é uma soma formal de pontos de X.

$$D = \sum_{i=0}^{m} n_i \cdot P_i \quad , \; n_i \in \mathbb{Z} \, , \; P_i \in X$$

Def (Divisores)

Um divisor é uma soma formal de pontos de X.

$$D = \sum_{i=0}^{m} n_i \cdot P_i \quad , \; n_i \in \mathbb{Z} , \; P_i \in X$$

$$\mathrm{Div}(X) := \text{grupo de divisores de } X$$

Def (Divisores)

Um divisor é uma soma formal de pontos de X.

$$D = \sum_{i=0}^{m} n_i \cdot P_i \quad , \quad n_i \in \mathbb{Z} \, , \quad P_i \in X$$

$$\mathrm{Div}(X) := \text{grupo de divisores de } X$$

Def (Grau de um divisor)

$$\deg\left(\sum n_i \cdot P_i\right) = \sum n_i$$

Def (Divisor principal)

Dado $\varphi \in K(X)^\times$ defina

$$\operatorname{div}(\varphi) = \sum_{P \in X} v_P(\varphi) \cdot P \in \operatorname{Div}(X)$$

Def (Divisor principal)

Dado $\varphi \in K(X)^\times$ defina

$$\operatorname{div}(\varphi) = \sum_{P \in X} v_P(\varphi) \cdot P \in \operatorname{Div}(X)$$

Fato:

$$\deg \operatorname{div}(\varphi) = 0$$

- $\mathrm{Div}^0(X) := \ker \deg$

- $\mathrm{Div}^0(X) := \mathrm{Ker}\,\deg$
- $\mathrm{Pic}(X) := \mathrm{Div}(X) / \mathrm{Im}\,\mathrm{div}$

- $\mathrm{Div}^0(X) := \mathrm{Ker}\,\deg$
- $\mathrm{Pic}(X) := \mathrm{Div}(X) / \mathrm{Im}\,\mathrm{div}$
- $\mathrm{Pic}^0(X) := \mathrm{Div}^0(X) / \mathrm{Im}\,\mathrm{div}$

- $\mathrm{Div}^0(X) := \mathrm{Ker}\ \deg$

- $\mathrm{Pic}(X) := \mathrm{Div}(X) / \mathrm{Im}\ \mathrm{div}$

- $\mathrm{Pic}^0(X) := \mathrm{Div}^0(X) / \mathrm{Im}\ \mathrm{div}$

- Temos seq. exata

$$0 \to K^\times \to K(X)^\times \xrightarrow{\mathrm{div}} \mathrm{Div}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \to 0$$

Def (Espaços de funções)

$D = \sum n_i \cdot P_i$ divisor.

$$L(D) = \{ \varphi \in K(x)^* \mid v_{P_i}(\varphi) \geq -n_i \ \forall i \} \cup \{0\}$$

K-espaço vetorial

Def (Espaços de funções)

$D = \sum n_i \cdot P_i$ divisor.

$$L(D) = \{\varphi \in K(x)^* \mid v_{P_i}(\varphi) \geq -n_i \ \forall i\} \cup \{0\}$$

K-espaço vetorial

Fatos:

- $\dim_K L(D) < \infty$

Def (Espaços de funções)

$D = \sum n_i \cdot P_i$ divisor.

$$L(D) = \{ \varphi \in K(x)^{*} \mid v_{P_i}(\varphi) \geq -n_i \ \forall i \} \cup \{0\}$$

K-espaço vetorial

Fatos:

- $\dim_K L(D) < \infty$
- $\deg D < 0 \Rightarrow L(D) = 0$

Def (Espaços de funções)

$D = \sum n_i \cdot P_i$ divisor.

$$L(D) = \{ \varphi \in K(X)^{\times} \mid v_{P_i}(\varphi) \geq -n_i \ \forall i \} \cup \{0\}$$

K - espaço vetorial

Fatos:

- $\dim_K L(D) < \infty$
- $\deg D < 0 \Rightarrow L(D) = 0$
- $L(D)$ só depende da classe $[D] \in \mathrm{Pic}(X)$

Teorema (Riemann-Roch)

D divisor

$$\dim_K L(D) - \dim_K L(K_X - D) = \deg D - g + 1$$

onde g é o gênero da curva e $K_X \in \mathrm{Div}(X)$

t.q. $\deg K_X = 2g - 2$.

Teorema (Riemann-Roch)

D divisor

$$\dim_k L(D) - \dim_k L(K_X - D) = \deg D - g + 1$$

onde g é o gênero da curva e $K_X \in \mathrm{Div}(X)$ t.q. $\deg K_X = 2g-2$.

Corolário

Se $\deg D > 2g-2$

$$\dim_k L(D) = \deg D - g + 1$$

Exemplo

Se $g=1$ e $O \in X$, então

$$\dim_K L(n \cdot O) = n \qquad \forall n > 0$$

Exemplo

Se $g=1$ e $\mathcal{O} \in X$, então

$$\dim_K L(n \cdot \mathcal{O}) = n \quad \forall n > 0$$

- $L(\mathcal{O}) = K \cdot 1$ (funções constantes)
- $L(2\mathcal{O}) = K \cdot 1 \oplus K \cdot x$
- $L(3\mathcal{O}) = K \cdot 1 \oplus K \cdot x \oplus K \cdot y$

$1, x, y$ definem uma função

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow \mathbb{P}^2 \\ p &\longmapsto [1 : x : y] \end{aligned}$$

$1, x, y$ definem uma função

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow \mathbb{P}^2 \\ p &\longmapsto [1 : x : y] \end{aligned}$$

Podemos provar que é injetiva.

$1, x, y$ definem uma função

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow \mathbb{P}^2 \\ p &\longmapsto [1 : x : y] \end{aligned}$$

Podemos provar que é injetiva.

Além disso,

$$1, x, y, x^2, y^2, x^3, xy \in L(6O)$$

$1, x, y$ definem uma função

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow \mathbb{P}^2 \\ p &\longmapsto [1 : x : y] \end{aligned}$$

Podemos provar que é injetiva.

Além disso,

$$1, x, y, x^2, y^2, x^3, xy \in L(6O)$$

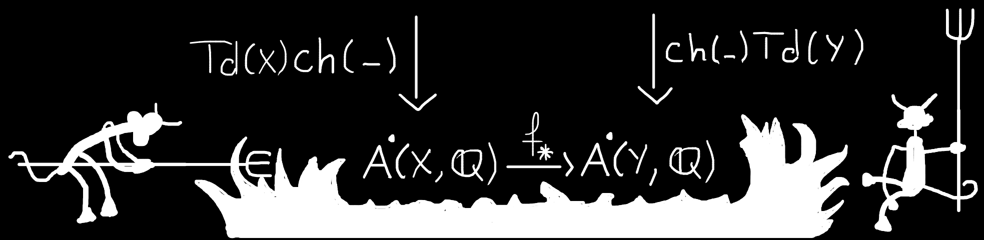
Logo, $1, x, y$ satisfazem uma eq. não trivial de grau 3. $\Longrightarrow X \cong V(f)$, $\deg f = 3$.

Outras direções e aplicações

- Hirzebruch - R.R.
- Grothendieck - R.R.

  Seja $X \xrightarrow{f} Y$ um morfismo próprio entre esquemas projetivos e suaves sobre um corpo K. Então o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{tikzcd}
K^0(X) \arrow[r, "f_!"] \arrow[d, "Td(X)ch(-)"'] & K^0(Y) \arrow[d, "ch(-)Td(Y)"] \\
A^*(X,\mathbb{Q}) \arrow[r, "f_*"] & A^*(Y,\mathbb{Q})
\end{tikzcd}$$



- Dualidade de Grothendieck
- Classificação de fibrados de linha em $\mathbb{P}^1$.
- Formas modulares
- Conj. de Weil para curvas . . .

Obrigado!